А.Г. Дьячков, "Задачи по теории вероятностей"

1 Комбинаторика, классическая вероятность

1. Какова вероятность того, что при 4 бросаниях монеты:
   (a) ровно три раза подряд выпадет герб?
   (b) не будет ни одного случая, когда герб выпадет подряд?
   (c) герб и цифра выпадают поочередно?

2. Какова вероятность того, что при 2 бросаниях игральной кости:
   (a) два раза подряд выпадет число очков ≥ 5?
   (b) все два раза выпадает разное число очков?
   (c) сумма выпавших очков будет ≥ 5?

3. В лифт 8-ми этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

4. Из колоды (36 карт) достают наудача две карты. Найти вероятность того, что среди них есть туз?

5. Группа, состоящая из $2k$ мальчиков и $2k$ девочек делится на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части число мальчиков и девочек одинаково?

6. Из колоды (52 карты) выбирают 4 карты. какова вероятность того, что в выборке представлена только одна масть.

7. Куб, все грани которого окрашены, распилили на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлечённый кубик будет иметь две окрашенные грани.

8. Какова вероятность того, что при произвольном выкладывании 8 карточек, среди которых 4 - с буквой "О", 2 - с буквой "К", 1 - с буквой "Л" и 1 - с буквой "Т", получится слово "ОКОЛОТОК" ? Проведите аналогичные рассуждения для слов "ПСИХОЛОГИЯ" и "МАТЕМАТИКА".

9. Среди 25 экзаменационных билетов имеется 5 "счастливых" и 20 "несчастливых". У кого больше вероятность вытащить "счастливый" билет: у того, кто подошёл за билетами первым, или у того, кто подошёл вторым?

10. Найти вероятность того, что дни рождения у n случайно собравшихся людей различны.

11. Найти вероятность угадать $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$ выигрышных цифр в лотерее **"6 из 49"**.

12. Пусть среди 10 студентов группы проводится анкетный опрос, где каждый участник опроса называет 3 из 9 своих товарищей, которых он предпочитает остальным. Пусть событие A состоит в том, что один из студентов назван в 9 анкетах. Найти $\Pr\{\mathsf{A}\}$, если заполнение анкет было случайным, т.е. любая комбинация заполнения анкет равновероятна ?

2 Случайные величины и распределения вероятностей

1. Случайная величина ξ имеет распределение вероятностей $q(x) = \Pr\{\xi = x\}$, где

x	-2	-1	0	1	2	другие x
$q(x)$	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1	0

.

   (a) Применяя формулы

$$\mathbf{M}\xi = \sum_x x\, q(x), \quad \mathbf{D}\xi = \sum_x (x - \mathbf{M}\xi)^2\, q(x), \quad F(t) = \Pr\{\xi < t\} = \sum_{x\,:\,x<t} q(x), \quad (1)$$

   вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}\xi$, дисперсию $\mathbf{D}\xi$ и найти выражение для функции распределения $F(t) = \Pr\{\xi < t\}$.

   (b) Нарисовать [1] на одном и том же листе друг под другом графики функций $q(x)$ и $F(x)$.

   (c) Найти вероятность того, что величина ξ принимает значение, не превосходящее по абсолютной величине 1, т.е. найти $\Pr\{|\xi| \le 1\}$?

2. Пусть случайная величина S_n имеет распределение вероятностей

$$q(x) = \Pr\{S_n = x\} = \binom{n}{x} p^x\,(1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad 0 < p < 1/2,$$

которое называется *биномиальным* распределением с параметрами (n, p).

   (a) Для примера, когда $n = 6$, $p = 1/2$, и для примера, когда $n = 6$, $p = 1/3$, провести, используя формулы (1), следующие вычисления.

      i. Вычислить с помощью калькулятора и написать в форме таблицы

x	0	1	2	$\ldots$	n	другие x
$q(x)$	$q(0)$	$q(1)$	$q(2)$	$\ldots$	$q(n)$	0

.

      значения функции $q(x)$. Проверить, что $\sum_x q(x) = 1$.

      ii. Найти выражение для функции распределения $F(t) = \Pr\{S_n < t\}$

      iii. Нарисовать на одном и том же листе друг под другом графики $q(x)$ и $F(x)$.

      iv. Вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}S_n$ и дисперсию $\mathbf{D}S_n$.

   (b) При $n = 6$, $p = 1/2$ найти наибольшее целое число B^-, для которого

$$\Pr\{B^- \le S_n \le n - B^-\} > 0.7.$$

   (c) При $n = 6$, $p = 1/3$ найти наименьшее целое число B^+, для которого

$$\Pr\{B^+ \le S_n \le n\} < 0.02.$$

[1] В этой и в следующих задачах все рисунки делать на стандартных листах A4 миллиметровой бумаги.

3. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} A, & \text{если } x \in [0,2], \\ 0, & \text{если } x \notin [0,2], \end{cases}$$

которая называется плотностью *равномерного* распределения на отрезке $[0,2]$.

(a) Пользуясь свойствами $p(x) \geq 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$, определить число $A > 0$.

(b) С помощью формулы

$$F(t) = \Pr\{\xi < t\} = \int\limits_{-\infty}^{t} p(x)\,dx$$

найти выражение функции распределения $F(t)$.

(c) Применяя формулы

$$\mathbf{M}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,p(x)\,dx, \qquad \mathbf{D}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}\xi)^2\,p(x)\,dx,$$

вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}\xi$ и дисперсию $\mathbf{D}\xi$ случайной величины ξ, имеющей равномерное распределение на отрезке $[0,2]$.

(d) Нарисовать на одном и том же листе друг под другом графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

4. Провести все расчеты предыдущей задачи для случайной величины ξ с плотностью *показательного* распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ A\,e^{-2x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

References

[1] Артемьева Е.Ю. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов. М., Издательство МГУ, 1969.

[2] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. Издательство "Высшая школа", 1972.

[3] Артемьева Е.Ю., Мартынов Е.М. Вероятностные методы в психологии. М., Издательство МГУ, 1975.

[4] Дьячков А.Г. Теория вероятностей. Лекции. М., Издательство МГУ, 1980.

[5] Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. М., "Финансы и статистика", 1995.